Teil 1: Periodische und aperiodische Strukturen

Die Kästchen eines karierten Papiers bilden eine periodische Struktur. Das heißt, man kann eine darübergelegte, transparente Kopie um beliebig viele Einheiten (hier Kästchen) verschieben, so dass die Kopie danach das Original wieder überdeckt:

- Man sagt deshalb auch, dass man eine periodische Struktur durch Verschiebung in sich selbst überführen kann.
- Diese Eigenschaft periodischer Strukturen trägt den wissenschaftlichen Namen Translationssymmetrie (lat. translatio: Übertragung).
- Eine weitere Symmetrieeigenschaft des karierten Papiers ist die Überführung in sich selbst durch eine 90°-Drehung. Da vier 90°-Drehungen eine ganze Drehung ergeben, spricht man von einer vierzähligen Drehsymmetrie.
- Periodische Strukturen können auch aus regelmäßigen Dreiecken oder Sechsecken (Bienenwaben) gebildet werden, nicht jedoch aus Fünfecken!

Die Molekülstruktur der DNA (des Erbgutträgers) ist ein weiteres Beispiel für eine periodische Struktur, zugleich aber auch ein prominentes Gegenbeispiel:

- Im linken Teil von *Fig. 1.1* ist ein Molekülmodell der DNA-Struktur abgebildet. Den verdrillten Aufbau der DNA bezeichnet man als Doppelhelix.
- Unverdrillt gleicht die Doppelhelix einer leiterförmigen Aneinanderreihung von Basenpaaren. Das Schema ist im rechten Teil von *Fig. 1.1* dargestellt.
- Betrachtet man alle Basenpaare unterschiedslos nur als zwei Kreise, die durch eine Leitersprosse verbunden sind, so besitzt diese Leiter in ihrer Längsrichtung eine (eindimensionale) Translationssymmetrie. Dies kann man mit dem rechten Teil der transparenten Schablone in *Fig. 1.2* durch Verschieben prüfen.
- Es existieren jedoch vier unterschiedliche Basenpaare, die in *Fig. 1.1 rechts* mit den Buchstabenpaaren A-T, T-A, C-Gu und Gu-C bezeichnet sind. Diese Paare sind in unregelmäßiger Abfolge aneinandergereiht.
- Auf dem linken Teil der Schablone wurden die untersten Buchstabenpaare aus *Fig. 1.2* als Kopie eingefügt. Es ist nicht möglich, die Schablone so nach oben zu verschieben, dass alle Buchstabenpaare der Schablone auf jeweils gleichen Buchstabenpaaren des Originals zu liegen kommen.

Wegen ihrer unregelmäßigen Aneinanderreihung besitzt die Abfolge der Basenpaare (bzw. Buchstabenpaare) keine Translationssymmetrie.
Man nennt diese Abfolge von daher „nichtperiodisch“ oder „aperiodisch“.

Teil 2: Lange Perioden und Quasiperiodizität

Hätte ein Jahr exakt 364 Tage (52 mal 7 Tage), würde Neujahr periodisch immer auf den gleichen Wochentag fallen, z.B. immer auf einen Dienstag.
Das tropische (jahreszeitliche) Jahr dauert jedoch 365,242190... Tage.

- Im ersten Jahrhundert vor Christus verfügte der römische Kaiser Gaius Julius Caesar, dass jedes vierte Jahr statt 365 Tagen 366 Tage haben sollte. Dadurch wiederholte sich die Folge der mit einem Dienstag beginnenden Jahre alle 28 Jahre in Intervallen von 11, 6, 5 und 6 Jahren. Die durchschnittliche Jahreslänge betrug 365,25 Tage. Dieser Kalender hieß Julianischer Kalender.
- Mitte des 16. Jahrhunderts war nach diesem Julianischen Kalender der Frühlingsanfang vom 21. März (im Jahre 0) auf den 11. März vorgerückt.
- Papst Gregor XIII. ließ deshalb 1582 zehn Kalendertage überspringen und bestimmte eine Korrektur des Kalenders: In den Jahren, die Vielfache von 100 sind, sollte das Schaltjahr ausfallen. In den Jahren, die zusätzlich Vielfache von 400 sind, sollte dieses Ausfallen selbst ausfallen. Daher waren nach diesem (heute noch gültigen) Gregorianischen Kalender nur die Jahre 1600 und 2000 Schaltjahre, 1700, 1800 und 1900 aber z. B. nicht.
- Die periodische Wiederholung der mit einem Dienstag beginnenden Jahre erhöhte sich dadurch auf 400 Jahre. Dies wird in *Fig. 2.1* graphisch dargestellt.
- Im Gregorianischen Kalender entsprechen diesen 400 Jahren exakt 146.097 Tage. Dadurch besitzt jedes Kalenderjahr durchschnittlich 365,2425 Kalendertage. Diese ganzzahligen Verhältnisse sind jedoch nur eine Annäherung an die kosmische Realität, da die Länge eines tropischen Jahres 365,242190... Tage beträgt. D. h., die Dauer eines Jahres steht in Wirklichkeit in keinem ganzzahligen Verhältnis zu der Dauer eines Tages. Ein derartiges Zusammenspiel periodischer Erscheinungen bezeichnet man als quasiperiodisch (lat. quasi: gleich wie, beinahe).

Das quasiperiodische Prinzip kann sehr anschaulich an der blauen und der roten Sinuskurve in *Fig. 2.2* gezeigt werden, deren Periodenlängen im nicht ganzzahligen Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander stehen (1.6180339... zu 1).
Einzeln betrachtet besitzt jede der beiden Sinuskurven Translationssymmetrie. Dennoch entsteht aus ihrer Überlagerung, aus der Summe der vertikalen Auslenkungen der beiden Sinuskurven, eine quasiperiodische Kurve. Diese gelbe Kurve hat die Symmetrieeigenschaft verloren. Dies kann mit den verschiebbaren Kopien geprüft werden.

Teil 3: Kristalline und quasikristalline Geometrie

Die Kristallographie ist die Lehre von der atomaren Ordnung der Kristalle. Sie wurde im 19. und 20. Jahrhundert auf der Annahme aufgebaut, alle atomaren Ordnungsprinzipien müssten zwingend periodisch sein:

- Tatsächlich befinden sich z. B. bei einem Kochsalzkristall (NaCl) die Zentren der kleineren Natriumatome und der größeren Chloratome jeweils in den Mittelpunkten der schwarzen bzw. weißen Würfel eines gedachten räumlichen Schachbretts.
- Aufgrund dieses periodischen atomaren Aufbaus haben die meisten Kochsalzkristalle auch eine würfelförmige äußere Gestalt.
- *Fig. 3.1* zeigt Pyritkristalle (FeS_2), die trotz eines etwas komplizierteren Aufbaus in perfekter Würfelform auskristallisieren können.
- Die Kristallographie unterscheidet 230 (!) periodische Aufbauvarianten.

Als der israelische Forscher Daniel Shechtman 1984 Röntgenbeugungsbilder einer im Labor erzeugten Aluminium-Mangan-Verbindung (AlMn) veröffentlichte, führte das unter den Wissenschaftlern zunächst zu großen Irritationen: Die Beugungsbilder wiesen nämlich auf eine atomare Struktur mit fünfzähliger (bzw. zehnzähliger) Symmetrie hin, die nicht periodisch aufgebaut sein kann, aber dennoch einen hohen Grad an Ordnung besitzen muss.

- Inzwischen kann man diesen im Labor gezüchteten Festkörpern ihren fünf- bzw. zehnzählig drehsymmetrischen Aufbau auch äußerlich ansehen. Man nennt sie heute wegen ihrer quasiperiodischen atomaren Struktur Quasikristalle.
- *Fig. 3.2* zeigt AlCuFe-Quasikristall-Dodekaeder (Zwölfflächner).
- *Fig. 3.3* zeigt dekagonale (zehneckige) Prismen von AlCoCu-Quasikristallen
- *Fig. 3.4* zeigt das Röntgenbeugungsbild einer dekagonalen AlNiCo-Verbindung.
- Eine geometrische Erklärung, speziell für die dekagonalen atomaren Strukturen, boten die 1973 von Roger Penrose erdachten Parkette, die fünf- bzw. zehnzählige Drehsymmetrien fast gleichmäßig (quasiperiodisch) auf die Fläche verteilen.
- *Fig. 3.5* verdeutlicht die Anordnung der Drehsymmetriezentren in einem Penrose-Rhomben-Parkett durch ein zusätzlich aufgespanntes Pentagramm („Drudenfuß“).

2006 stellte Uli Gaenshirt eine Wachstumsformel vor, mit der das schrittweise (sukzessive) Wachstum eines perfekten Quasikristalls berechnet werden kann.
Die Ausstellung zeichnet den Weg zu dieser Formel nach. Dieser Weg führt vom Goldenen Schnitt, über die eindimensionalen Fibonacci-Sequenzen, bis hin zu einigen sehr bemerkenswerten Eigenschaften der Penrose-Parkette.

Teil 4: Der Goldene Schnitt & das Goldene Verhältnis

Fig. 3.5 zeigt, dass die Maßverhältnisse in einem Penrose-Parkett den Maßverhältnissen in einem Pentagramm sehr genau entsprechen.
In *Fig. 4.1* wird die rote Strecke durch eine Diagonale des großen Pentagramms in eine kleinere (orange) Teilstrecke S und eine größere (blaue) Teilstrecke L geteilt (S = short, dt. kurz, lat. minor; L = long, dt. lang, lat. major). Durch das darübergelegte verkleinerte Pentagramm erschließt sich die klassische Definition des Goldenen Schnitts:

- Die kleinere Teilstrecke S steht zur größeren Teilstrecke L im gleichen Verhältnis, wie die größere Teilstrecke L zur Gesamtstrecke (L+S).

Zur Berechnung der Länge der Teilstrecke L legt man $L+S = 1$ bzw. $S = 1 - L$ fest.

- Die Definition $S : L = L : (L+S)$ lautet dann: $(1 - L) : L = L : 1$ bzw. $L^2 + L - 1 = 0$
- Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist: $L = 0{,}5\,(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618\ldots$.

In *Fig. 4.2* wird gezeigt, wie man auf der Grundlage einer Einheitsstrecke der Länge 1 (rot), eine Strecke L (blau) der Länge $0{,}5\,(\sqrt{5} - 1)$ geometrisch konstruieren kann:

- Das silberne rechtwinklige Dreieck besitzt die Seitenlängen $a = 2$, $b = 1$, $c = ?$.
- Für rechtwinklige Dreiecke fordert der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$.
- Das gelbe Quadrat (c^2) muss also die gleiche Fläche haben wie die fünf roten Einheitsquadrate, die den Flächeninhalt 5 besitzen ($a^2 + b^2$ d. h. $2^2 + 1^2$).
- Also ist auch $c^2 = 5$. Nach beidseitigem Wurzelziehen folgt: $c = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots$.
- Zieht man von der Seitenlänge $c = \sqrt{5}$ des gelben Quadrats die rote Einheitsstrecke der Länge 1 ab, erhält man $\sqrt{5} - 1 = 1{,}236\ldots$.
- Halbiert man diese Reststrecke, erhält man $0{,}5\,(\sqrt{5} - 1) = L = 0{,}618\ldots$ (die blauen Strecken).
- Zieht man von der roten Strecke L ab, erhält man $S = 0{,}381\ldots$ (die orange Strecke).

Der Verhältniswert L : S wird das „Goldene Verhältnis“ genannt. Man bezeichnet es mit dem griechischen Buchstaben τ (sprich: Tau): $\tau = L : S = 0{,}5\,(\sqrt{5} + 1) = 1{,}618\ldots$
- Wird $L+S = 1$ festgelegt, gilt darüber hinaus: $L \cdot \tau = 1$ und $S \cdot \tau \cdot \tau = 1$

Das Dreieck aus *Fig. 4.3* hat die Schenkellängen 1 (rot) und τ (orange). Die Seitenlängen benachbarter Quadrate unterscheiden sich jeweils um den Faktor $\tau = 1{,}618\ldots$.
Gleichfarbige Quadratseiten unterscheiden sich um den Faktor $\tau \cdot \tau \cdot \tau = 4{,}236\ldots$.
Der orange Stab hat die Länge τ , der blaue Stab hat die Länge $\tau \cdot \tau$.

Teil 5: Substitutions- und Projektionsmethoden

Unter einer Substitution versteht man in der Geometrie die Ersetzung von Formen durch eine größere Anzahl verkleinerter Kopien. Dabei ist diese Ersetzung durch die wiederholte Anwendung auf die Kopien beliebig fortsetzbar:

- Z. B. kann man eine markierte Strecke von einem Meter Länge, Intervall genannt, durch zehn Intervalle von je einem Dezimeter Länge ersetzen.
- Jedes dieser Dezimeterintervalle kann man wiederum durch zehn Intervalle von je einem Zentimeter Länge ersetzen, usw.
- Diese Substitutionen führen zu immer mehr, aber auch zu entsprechend kleineren Intervallen.

In *Fig. 5.1* wird eine Substitution auf der Grundlage des Goldenen Schnitts gezeigt, die zu einer quasiperiodischen Intervallfolge (Intervallsequenz) führt:

- Man beginnt mit einem blauen Intervall L_Q der Länge $\tau \cdot \tau$ (= $\tau + 1$) und einem orangen Intervall S_Q der Länge τ *(erste Zeile in Fig. 5.1).*
- Das blaue L_Q-Intervall kann durch die Intervallfolge LSLSL ersetzt werden, das orange S_Q-Intervall durch die Folge LSL *(Fig. 4.3 hilft beim Verständnis).*
- Es entsteht also die Intervallsequenz LSLSLLSL *(zweite Zeile in Fig. 5.1)*
- Jedes Intervall L kann seinerseits durch die Intervallfolge L'S'L'S'L' ersetzt werden und jedes Intervall S durch L'S'L' *(dritte Zeile in Fig. 5.1).*
- Diese durch zweimalige Substitution erzeugte Intervallsequenz aus nunmehr 13 S'- und 21 L'-Intervallen ist quasiperiodisch.

In *Fig. 5.2* sind ein horizontaler roter und zwei orange Streifen durch ein gedrehtes, quadratisches Raster gelegt (der Drehwinkel beträgt arctan $1/\tau = 31{,}717...°$).

- Wenn man jeden Rastereckpunkt, der sich innerhalb des roten Streifens befindet, senkrecht nach oben verlängert (projiziert), ergeben diese vertikalen Linien (schwarze Schnüre) die gleiche Sequenz wie die Substitution in der *zweiten Zeile von Fig. 5.1!*
- Projiziert man zusätzlich auch die Punkte, die sich in den beiden orangen Streifen befinden, senkrecht nach oben (rote Schnüre), bilden alle vertikalen Schnüre zusammen die gleiche Abfolge wie die zweite Substitution in der *dritten Zeile von Fig. 5.1!*
- Diese Methode wird die „Streifenprojektionsmethode" genannt. Sie geht auf den niederländischen Mathematiker N. G. de Bruijn zurück.

Quasiperiodischen Intervallsequenzen, die auf der Verhältniszahl $\tau = 0{,}5\,(\sqrt{5} + 1)$ des Goldenen Schnitts beruhen, bezeichnet man als Fibonacci-Sequenzen.

Teil 6: Fibonacci-Reihe und Fibonacci-Sequenz

Leonardo Fibonacci (ca. 1180-1240) war ein Mathematiker aus Pisa.
Das Abendland verdankt ihm die Einführung der in Indien erfundenen Null.
Nach ihm ist die folgende Zahlenreihe benannt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...
Sie entsteht durch das Zusammenzählen der jeweils letzten beiden Zahlenglieder, wenn für die beiden ersten Glieder die 1 gewählt wurde.

Ursprünglich führte Leonardo Fibonacci als Beispiel die fiktive Entwicklung einer Hasenpopulation an:

- Aus einem jungen Hasenpaar wird nach einem Monat ein geschlechtsreifes altes Hasenpaar, das nach einem weiteren Monat seinerseits ein junges Hasenpaar in die Welt setzt.
- Jedes alte Hasenpaar lebt ewig und setzt jeden weiteren Monat ein junges Hasenpaar in die Welt.
- Das monatliche Anwachsen der Anzahl der Hasenpaare (alt und jung gemeinsam) entspricht dabei dem Anwachsen der Zahlenwerte in der Fibonacci-Reihe.
- Die quasiperiodisch wechselnde Folge von jungen Hasenpaaren (mit der Länge S) und alten Hasenpaaren (mit der Länge L) bezeichnet man als Fibonacci-Sequenz.

Fig. 6.1 ist ein fest montiertes oranges Start-Junghasenpaar (die Population des ersten Monats).
Fig. 6.2 besteht aus 7 beweglichen Junghasenpaaren (orange) und 12 alten Hasenpaaren (blau).

- Eine Hasenpaar-Sequenz kann man dadurch aufstellen, dass man die Population jedes Folgemonats jeweils rechts an die Population des Vormonats ansetzt. Dabei muss man die Reihenfolge des Vormonats beibehalten. Außerdem muss man jedes junge Hasenpaar des Vormonats im Folgemonat durch ein altes Paar ersetzen. Jedes alte Hasenpaar des Vormonats bekommt auch im Folgemonat seinen Platz, es wird aber zusätzlich links von diesem ein junges Paar aufgestellt (d. h., zuerst das junge Paar, da die Reihe von links nach rechts aufgestellt wird!).
- Die Fibonacci-Sequenz, die durch diese Art der Aufstellung entsteht, entspricht erstaunlicherweise den S'-L'-Sequenzen aus *Fig. 5.1* und *Fig. 5.2* , wenn man dort die Intervalle von der Mitte ausgehend nach rechts zählt.

Jedoch lässt keine dieser drei bisher betrachteten, unterschiedlichen Erzeugungsregeln einer Fibonacci-Sequenz (*Fig. 5.1*, *Fig 5.2* und *Fig 6.2*) den direkten Schluss darauf zu, ob das nächste Intervall ein L-Intervall oder ein S-Intervall ist.

Teil 7: Die Durchschnittslänge der gelben Stäbe

Zur Beschreibung eines quasiperiodischen atomaren Wachstums bedarf es einer Regel, die sukzessiv (Schritt für Schritt) angibt, ob das nächste Intervall ein langes (blaues) L-Intervall oder ein kurzes (oranges) S-Intervall ist.

- Der Weg zu einer solchen Regel, die „Wachstumsregel“ genannt wird, führt über die Berechnung einer durchschnittlichen Länge der L- und der S-Intervalle.
- Die Länge eines Durchschnittsintervalls kann berechnet werden, da in einer (unendlich langen!) Fibonacci-Sequenz nicht nur die Längen der Intervalle im Goldenen Verhältnis τ zueinander stehen ($L : S = \tau$), sondern auch deren jeweilige Anzahl ($N_L : N_S = \tau$). Dies war schon Johannes Kepler vor 400 Jahren bekannt.
- Da also das L-Intervall τ-mal so oft (1,618... -mal so oft) wie das S-Intervall vorkommt, muss die Länge des Durchschnittsintervalls im gleichen Verhältnis näher bei der Länge des L-Intervalls als bei der Länge des S-Intervalls liegen.
- Da L = L'S'L'S'L' und S = L'S'L' gilt *(vgl. Fig. 5.1)*, ergibt sich für die Länge des Durchschnittsintervalls 3L'+S', da diese Strecke um S' kürzer ist als L und um L' länger als S. Damit erfüllt diese Länge die oben angeführte Bedingung.

Der am Start-Junghasenpaar *(Fig. 6.1)* fixierte gelbe Stab *(Fig. 7.1)* entspricht diesem Durchschnittsintervall der Länge 3L'+S'. Bei aufgebauter Fibonacci-Hasenpaar-Sequenz und einer daneben gelegten periodischen Aneinanderreihung gelber Stäbe *(Fig. 7.2)* verbindet deshalb jeder dieser Stäbe zwei Hasenpaare miteinander.

- Genau betrachtet befinden sich die Stoßstellen der gelben Stäbe immer im mittleren Subintervall (Unterteilungsintervall)! Bei den alten Hasenpaaren ist das mittlere Subintervall ein L'-Intervall (blau), bei den jungen Hasenpaaren ein S'-Intervall (orange). Daher kann die Fibonacci-Hasenpaar-Sequenz auch in folgender Weise aufgebaut werden: Zuerst wird jeweils der gelbe Stab gelegt. Dann wird derjenige Hasenpaartyp (jung oder alt) ausgewählt, bei dem das Ende des gelben Stabs in seinem mittleren Subintervall zu liegen kommt!

Fig. 7.3 zeigt einen langen gelben Stab, der im Vergleich zu *Fig. 7.1* um den Faktor τ^3 vergrößert ist. Seine Länge entspricht der Seitenlänge des gelben Quadrats aus *Fig. 4.2* ($3L+S = \sqrt{5}$). Die Länge 3L+S ist aber ebenso die durchschnittlichen Intervalllänge einer Fibonacci-Sequenz aus L_Q- und S_Q-Intervallen ($L_Q = LSLSL = \tau^3 \cdot L$; $S_Q = LSL = \tau^3 \cdot S$).
Der lange gelbe Stab wird in Teil 8 als Durchschnittsmaß der L_Q- und der S_Q-Intervalle verwendet.

Teil 8: Die eindimensionalen Quasizellen Q^x

Ein mit periodischen Markierungen versehener Maßstab kann ebenso als eine Aneinanderreihung von eindimensionalen Elementarzellen aufgefasst werden. Dabei entspricht die Länge einer Elementarzelle dem Abstand zweier Markierungen.

Auf der Grundlage von periodisch aneinandergereihten gelben Stäben können auch quasiperiodische eindimensionale Elementarzellen (Quasizellen Q^x) konstruiert werden.

- In *Fig. 8* sind zwei identische, verschiebbare Quasizellen Q^x montiert. Beide Zellen bestehen jeweils aus einer LSLLSL-Substruktur (= Unterstruktur) und einem auf dieser Substruktur verschiebbaren gelben Stab der Länge 3L+S.
- Diese Zellen erzeugen bei wechselseitiger Aneinanderreihung Schritt für Schritt (sukzessiv) eine quasiperiodische L_Q-S_Q-Fibonacci-Sequenz.

Zu Beginn wird einer der beiden gelben Stäbe auf seiner Substruktur soweit links wie möglich mit der Rändelschraube fixiert. Daraufhin wird diese Substruktur selbst nach links geschoben. Bei jedem der nun folgenden Durchläufe (A-Ω) wird der Wert der fixierten (nach links geschobenen) Zelle auf die nicht fixierte (nach rechts geschobene) Folgezelle übertragen und anschließend auf dieser fixiert:

- (A) Die Substrukturen müssen jeweils so mit dem Hakenriegel untereinander verbunden werden, dass die rechte, gelbe Endmarkierung der linken, fixierten Zelle und die linke, gelbe Endmarkierung der rechten, nicht fixierten Zelle übereinandergestellt werden können (d. h., dass die beiden gelben Stäbe dann aneinandergereiht sind).
- Genau in dieser aneinandergereihten Position der beiden gelben Stäbe wird der Stab der rechten Zelle ebenfalls auf seiner Substruktur fixiert.
- Das Intervall zwischen den LL-Intervallgrenzen der beiden Zellen (diese liegen jeweils bei den schwarzen Rändelschrauben) ist nun entweder ein S_Q-Intervall (LSL) oder ein L_Q-Intervall (LSLSL).
- Die Fixierung des gelben Stabs auf der Substruktur der linken Zelle wird gelöst und die Verbindung der beiden Substrukturen untereinander entriegelt .
- Anschließend werden die Plätze der beiden Zellen getauscht (Ω).

Das Ergebnis des Startdurchlaufs (A-Ω) ist ein S_Q-Intervall. Weitere rekursive Durchläufe (lat. recurrere: zurücklaufen, d. h. auf Ω folgt immer wieder unmittelbar A) ergeben eine L_Q-S_Q-Fibonacci-Sequenz, die der L-S-Hasenpaarsequenz genau entspricht.

Teil 9: Rekursives Rechnen auf Einheitsskalen

In *Fig. 8* sind die beiden roten Einheitsintervalle der Quasizellen mit Einheitsskalen versehen, wobei sich an jeder roten Skala der 0-Wert jeweils links und der 1-Wert jeweils rechts befindet.
Die beiden Endmarkierungen des gelben Stabs zeigen auf den beiden roten Skalen ein und derselben Zelle immer den gleichen Wert an (Synchrone Doppelskala).
Die Skalenwerte benachbarter und miteinander verbundener Zellen unterscheiden sich hingegen immer um ganz bestimmte Werte:

- Bilden die beiden LL-Intervallgrenzen benachbarter Q^x-Zellen ein L_Q-Intervall, ist der Skalenwert der rechten Folgezelle im Bezug auf den Wert der linken Vorgängerzelle um 0,381... (S) vermindert.
- Bilden die beiden LL-Intervallgrenzen benachbarter Q^x-Zellen ein S_Q-Intervall, ist der Skalenwert der rechten Folgezelle im Bezug auf den Wert der linken Vorgängerzelle um 0,618... (L) erhöht.

In *Fig. 9* sind auf dem Schieber unter dem roten Einheitsintervall drei Markierungen angebracht:

- eine für den Vorgängerwert (bezeichnet mit „VORGÄNGER“)
- eine für den um 0.381... (S) verminderten L_Q-Folgewert (bezeichnet mit „$\mathbf{L_Q}$“)
- und eine für den um 0,618... (L) erhöhten S_Q-Folgewert (bezeichnet mit „$\mathbf{S_Q}$“).

Da die beiden Folgewert-Markierungen genau den Abstand 1 besitzen (L+S = 1), und die Werte 0 und 1 nicht zum Einheitsintervall gehören (mathematisch: offenes Intervall), kann immer nur der Vorgängerwert und eine der Folgewert-Markierungen innerhalb des Einheitsintervalls liegen.

- Beginnt man mit einem Vorgängerwert nahe Null (μ_0 = 0,0...01), dann befindet sich die S_Q-Folgewert-Markierung innerhalb des Einheitsintervalls.
- Markiert man deren Stellung mit der oberen Wert-Fixierung (bezeichnet mit „FIX“) und schiebt anschließend die Vorgängerwert-Markierung darunter, dann befindet sich als nächstes die L_Q-Folgewert-Markierung innerhalb der roten Einheitsskala.
- Die Fortsetzung dieses Prozesses erzeugt ebenfalls die L_Q-S_Q-Fibonacci-Sequenz.

Fig. 9 erklärt auch Folgendes: Da die Werterhöhung bei einem S_Q-Intervall τ-mal größer ist als die Wertverminderung bei einem L_Q-Intervall, muss zum Ausgleich die Anzahl der L_Q-Intervalle τ-mal größer sein als die Anzahl der S_Q-Intervalle!

Teil 10: Ammann-Linien im kleinen Wagenrad

Robert Ammann (1945-1993) war ein amerikanischer Amateurmathematiker und hatte großen Anteil an der Entwicklung der aperiodischen Parkette, d.h., der lückenlosen Flächenfüllungen mit geometrischen Formen in einer nichtperiodischen Weise.
Ammann entdeckte, dass einige quasiperiodische Parkette, wie die Penrose-Parkette, so mit einem Liniengitter (Quasigitter) überzogen werden können, dass jeweils gleiche Parkettbausteine (Fliesen) denselben Gitterausschnitt enthalten (Ammann-Linien).

In *Fig. 10.1* wird ein solches Quasigitter aus fünf gekreuzten Linienstrukturen mit jeweils 9 parallelen Linien erzeugt. Die Linienstrukturen sind um Vielfache des 36°-Winkels zueinander gedreht und einander überlagert.

- Der Stab aus *Fig. 10.2* legt die Linienabstände des Quasigitters fest. Er entspricht der LSLSLLSL-Fibonacci-Sequenz aus der zweiten Zeile von *Fig. 5.1*.
- Man kann den Stab mit seiner mittleren Bohrung auf den Dorn im Drehpunkt des zehneckigen Quasigitters aufstecken. Durch Drehen des Stabs kann man erkennen, dass die Intervalle zwischen den parallelen Linien einer Linienstruktur auf den Drehpunkt bezogen symmetrisch sind. Eine Ausnahme bilden jeweils die beiden mittleren Intervalle, die sich im silbernen Zehneck befinden.

Unabhängig von der Länge der Fibonacci-Sequenz, mit der man ein solches Quasigitter erzeugt, bleibt die Sortenanzahl der unterschiedlichen Gittermaschen auf 8 begrenzt.

- Einer bestimmten Sorte, den unregelmäßig fünfeckigen Gittermaschen, können rhombenförmige Fliesen aus *Fig. 10.3* („dicke Rhomben“ mit spitzen Winkeln von 72° = 360°/5) so zugeordnet werden, dass nur ganz bestimmte Lücken übrig bleiben. Sie können mit einer zweiten Sorte rhombenförmiger Fliesen aus *Fig. 10.4* („schmalen Rhomben“ mit spitzen Winkeln von 36° = 360°/10) gefüllt werden. Es ergibt sich ein lückenloses Penrose-Rhomben-Parkett.
- Seiner annähernd zehnfachen Drehsymmetrie wegen bezeichnet man ein solches, zehneckig umrissenes Penrose-Parkett als Wagenrad (engl. Cartwheel).

Man kann die Rhomben auch ohne Zuhilfenahme des Quasigitters so zusammenlegen, dass deren Ammann-Linien widerspruchsfrei fortgesetzt werden. Die Linien erfüllen dann die Funktion quasiperiodischer „Anlegeregeln“, englisch „Matching Rules“ genannt.
Allerdings führt diese Methode, die man als „Puzzeln“ bezeichnet, mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit früher oder später in eine Sackgasse.

Teil 11: Großes Wagenrad und Fünfeckparkett

Man kann zur Erzeugung eines Wagenrades aus Penrose-Rhomben statt der nur 8 Intervalle umfassenden L-S-Sequenz aus der zweiten Zeile von *Fig. 5.1* die 34 Intervalle umfassende L'-S'-Sequenz aus der dritten Zeile von *Fig. 5.1* verwenden. Dem dadurch entstehenden feinmaschigeren Gitter können dann ca. 18 mal so viele entsprechend kleinere Rhomben zugeordnet werden.
Die Bezeichnung „Großes Wagenrad“ für diese Struktur ist also nur der größeren Rhombenanzahl geschuldet, nicht ihrer tatsächlichen Größe.

Der äußere Bereich von *Fig. 11.1* zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus diesem großen Rhomben-Wagenrad mit farblich hervorgehobenen fünfzähligen Drehsymmetrien.

- Das farbige Muster im inneren zehneckigen Bereich von *Fig. 11.1* entspricht dem ersten von Roger Penrose entworfenen quasiperiodischen Parkett, dem Penrose-Pentagon-Parkett, das auf der Grundlage regelmäßiger Fünfecke aufgebaut ist.
- Die zwangsläufigen Lücken zwischen den Fünfecken füllte Penrose mit schmalen Rhomben, Schiffchen (Halbsternen) und Sternen.
- Das Penrose-Pentagon-Parkett ist so auf das Rhomben-Parkett gelegt, dass jeder Rhombus in der gleichen Weise von Fünfecken (Pentagonen) überdeckt wird.
- Diese eindeutige Beziehung zwischen dem Pentagon-Parkett und dem Rhomben-Parkett nennt man eine Äquivalenzbeziehung (Gleichwertigkeit).

Zum Pentagon-Parkett wurde Roger Penrose von Johannes Kepler (1571-1630) inspiriert. Kepler beschrieb 1619 in seinem Hauptwerk, den „Harmonices Mundi“ (Weltharmonik), die aperiodischen Eigenschaften eines Fünfeck-Zehneck-Stern-Parketts und illustrierte sie mit einem Kupferstich *(Fig. 11.2).*

- In *Fig. 11.3* wird mit einer Plexiglaskopie dieser Zeichnung gezeigt, dass das Kepler-Parkett aus denselben (übergroßen) Rhomben zusammengesetzt werden kann, aus denen auch das Penrose-Pentagon-Parkett in *Fig. 11.1* zusammengesetzt worden ist.
- Bei der Überlagerung mit dem Penrose-Pentagon-Parkett wird jedes Zehneck des Kepler-Parketts durch einen Halbstern, zwei schmale Rhomben und drei Fünfecke gefüllt. Dadurch erhalten die Zehnecke eine „Orientierung“.
- Bei den Doppel-Zehnecken befindet sich im Überlappungsbereich der beiden Zehnecke immer ein schmaler, gelber Rhombus.

Teil 12: Urzeittiere in rhombischer Ordnung

Bei der Wagenrad-Ordnung von Penrose-Rhomben in *Fig. 10.1* und *Fig. 11.1* fällt auf, dass nirgendwo Bereiche zu sehen sind, in denen die Rhomben in einer periodischen Weise aneinandergereiht sind (so wie z. B. die rhombisch erscheinenden Kästchen eines aus schrägem Winkel betrachteten karierten Papiers).

- Gäbe es in einem Rhomben-Parkett solche periodisch geordneten Bereiche, dann wäre dort eine bestimmte Richtung in der Fläche bevorzugt.
- Ein solches Parkett könnte nur bedingt als Modell für eine quasikristalline, atomare Struktur dienen, da Röntgenbeugungsbilder für diese Strukturen eine vollkommen gleichmäßig verteilte zehnzählige Drehsymmetrie nachweisen.
- Mit den beiden Rhombensorten aus *Fig. 10.3* und *Fig. 10.4* sind periodische Zusammenstellungen grundsätzlich ausgeschlossen, wenn man beim Anlegen auf die fehlerfreie Fortsetzung der Ammann-Linien achtet.
- Ein solcher Ausschluss periodischer Zusammenlegungen kann aber auch durch asymmetrische Ein- und Ausbuchtungen der Rhombenseiten erreicht werden.

Auf dem Tischbild von *Fig. 12.1* sind diese Ein- und Ausbuchtungen zu Umrisslinien von Urzeittieren ausgeformt, die die Anlegeregeln auf „bestialische“ Weise erzwingen.

- Die Umrisslinien der größeren Folien *(Fig. 12.2)* umfassen 7 Urzeittiere und besitzen dieselben Eckpunkte wie die dicken Rhomben.
- Die Umrisslinien der kleineren Folien *(Fig. 12.3)* umfassen 4 Urzeittiere und besitzen dieselben Eckpunkte wie die schmalen Rhomben.

Fig. 12.4 und *Fig. 12.5* bilden ein weiteres Paar geometrischer Fliesen.
Diese beiden Formen sind die Bausteine des dritten Penrose-Parketts, des sogenannten „Kite and Dart“-Parketts (dt. Drachen- und Pfeil-Parkett).
Man kann auch diese Fliesen so auf das Tischbild legen, dass ihre modifizierten Umrisslinien mit den Umrisslinien des Tischbilds genau übereinstimmen. Auf diese Weise erhält man auch mit diesen Bausteinen eine lückenlose Zusammenlegung.

Das „Kite and Dart“-Parkett besitzt also ebenso wie das Penrose-Pentagon-Parkett eine Äquivalenzbeziehung (Gleichwertigkeit) zum Rhombenparkett.
Folglich besteht diese Äquivalenzbeziehung auch zwischen dem „Kite and Dart“-Parkett und dem Penrose-Pentagon-Parkett.

Teil 13: Drachenfische und Pfeilschwanzrochen

Auf dem großen runden Tisch von *Fig. 13.1* liegen insgesamt 40 Puzzle-Teile, aufgeteilt in 25 Drachenfische und 15 Pfeilschwanzrochen.

- Die Eckpunktgeometrie des Drachenfischs aus *Fig. 13.2* entspricht der des geometrischen Drachens aus *Fig. 12.4*.
- Die Eckpunktgeometrie des Pfeilschwanzrochens aus *Fig. 13.3* entspricht der des geometrischen Pfeils aus *Fig. 12.5*.

Aus allen 40 Puzzle-Teilen kann ein Wagenrad mit einer zehneckigen Außenform und der typischen, sowohl asymmetrischen als auch quasiperiodischen, inneren Struktur zusammengelegt werden. Das ist allerdings sehr schwierig!

- Es sind aber auch einfache Zusammenstellungen möglich, die eine vollkommene fünfzählige Drehsymmetrie besitzen.
- Als Kern hierfür dienen entweder 5 Drachenfische in Form einer zehneckigen Sonne (engl. sun) oder 5 Pfeilschwanzrochen in Form eines fünfzackigen Sterns (engl. star).
- Bei zusammenpassend gewählten Rotationsrichtungen (die Richtung kann durch Wenden der Puzzleteile auf ihre Rückseite geändert werden) kann ein Stern direkt an eine Sonne angelegt werden.
- Auch um diesen doppelten Kern herum sind weitere Anlegungen möglich.
- Man kann auch drei Sterne um eine Sonne herum legen, so dass sich zwangsläufig mindestens zwei der Sterne mit jeweils einer ihrer Zacken berühren. Dann entsteht genau an dieser Stelle eine Lücke, in die weder ein Drachenfisch, noch ein Pfeilschwanzrochen eingepasst werden kann.
- Aber auch zwei sich nicht berührende Sterne, die an eine Sonne angelegt werden, erzeugen eine letztendlich nicht fortführbare Situation!

Ein Verbot derartiger Anlegungen ist kein praktikabler Weg, da es nachweislich unendlich viele Zusammenstellungen gibt, die mit Sicherheit irgendwann zu einer nicht fortsetzbaren Konstellation führen.

Dieses Dilemma nennt man die „Unvollständigkeit der Anlegeregeln".

Teil 14: Inflation und Deflation von Rhomben

Ursächlich verantwortlich für die „Unvollständigkeit der Anlegeregeln“ ist die Tatsache, dass durch die Anlegeregeln alleine kein schlüssiges Ordnungsprinzip gewährleistet ist. Eine schlüssige Ordnung kann durch Substitution (Ersetzung) erzeugt werden.

- In *Fig. 5.1* wird das Intervall L_Q durch die Intervallfolge LSLSL ersetzt. Diese Form der Ersetzung wird als deflationär bezeichnet (lat. etwa: schrumpfend)
- Folgerichtig wird umgekehrt die Ersetzung der fünf kleinen Intervalle LSLSL durch das große Intervall L_Q als inflationär bezeichnet (lat. inflatio: Aufblähung).

Derartige Ersetzungsregeln existieren auch für die Penrose-Parkette. Das geometrische Prinzip wird im Folgenden für das Rhomben-Parkett erläutert:

- Die orangen Folien aus *Fig. 14.1* sind kleine Wagenräder, bei denen die drei äußeren schmalen Rhomben weggelassen worden sind. Die Linienstruktur einer orangen Folie kann mit den Linien auf einer grünen rhombenförmigen Folie aus *Fig. 14.2* zur Überdeckung gebracht werden. Die Rhomben der orangen Folie sind dann die deflationäre Ersetzung des grünen Rhombus.
- Umgekehrt ist der grüne Rhombus die inflationäre Ersetzung der Rhomben auf der orangen Folie.

Das Tischparkett von *Fig. 14.3* zeigt ein Rhomben-Parkett mit Wagenradordnung. Diese Ordnung ist durch die wiederholte Anwendung der deflationären Ersetzungsregel aus einem großen Ursprungsrhombus erzeugt worden.
Mit den grünen Rhomben aus *Fig. 14.2* kann eine inflationäre Ersetzung des gesamten Tischparketts vorgenommen werden. Dazu platziert man die grünen Rhomben so auf dem Tisch, dass die Linien in ihrem Inneren genau auf den Begrenzungslinien der orangenen Rhomben zu liegen kommen. Durch wiederholte inflationäre Ersetzungsschritte käme man zum großen Ursprungsrhombus zurück:

- Es kann gezeigt werden, dass ein Parkett, das keinen vollständigen Inflationsprozess zulässt, letztendlich nicht fehlerfrei fortgeführt werden kann!
- Für ein frei, nur nach den Anlegeregeln aufgebautes Rhombenparkett wäre ein solcher, vollständiger Inflationsprozess nur möglich, wenn man „zufällig“ einen absolut korrekten Ausschnitt aus einer Wagenrad-Ordnung aufgebaut hätte! Hierfür jedoch ist die Wahrscheinlichkeit verschwindend gering.

Teil 15: Quasiperiodischer Reigen im Zehneck

Mit den etwas holprigen Wagenrädern aus *Fig. 14.1* kann unter anderem der Nachweis erbracht werden, dass es möglich ist, eine Fläche vollständig mit einer einzigen Form quasiperiodisch zu überdecken.

- Bei der Überdeckung wird der notwendige Wechsel der Abstände durch unterschiedliche Formen der Überlappung erreicht.
- In der Illustration auf dem Tisch von *Fig. 15.1* zeigen die Mädchen einen quasiperiodischen Reigen, bei dem sie sich mit ihren Finger- und ihren Fußspitzen auf zwei unterschiedliche Weisen gegenseitig berühren.
- Für den geometrischen Überblick ist jedem Mädchen ein Rhombus zugeordnet.

Mit den markierten Zehnecken auf den Folien von *Fig. 15.2* , die von der Mathematikerin Petra Gummelt 1995 erstmals vorgestellt wurden, ist es ebenso möglich, eine Fläche vollständig quasiperiodisch zu überdecken (Die Rhomben sind auch hier nur zur geometrischen Orientierung hinzugefügt).

- Die Überdeckungsregeln der Zehnecke sind genau dann verwirklicht, wenn alle schraffierten Bereiche durch die Überdeckung kreuzschraffiert erscheinen.
- Man kann die Folien auf dem Tisch von *Fig. 15.1* so anordnen, dass jeweils die Rhombenecke, die auf der Folie eine Ecke des Zehnecks berührt, auf eine Rhombenecke zu liegen kommt, in der sich die Fußspitze eines Mädchens befindet. Auf diese Weise wird die Überdeckungsregel der markierten Zehnecke erfüllt (man beachte die entstehende, vollständige Kreuzschraffur!).

Es lässt sich nachweisen, dass zwischen dem Gummelt-Zehneck und dem dicken Rhombus ebenfalls eine Äquivalenzbeziehung (Gleichwertigkeit) besteht.

Das bedeutet aber leider auch, dass der „Unvollständigkeit der Anlegeregeln“ eine „Unvollständigkeit der Überdeckungsregeln“ entspricht.

Vollständige Anlege- bzw. Überdeckungsregeln, die fehlerfreie Zusammenstellungen erzeugen, werden, ebenso wie im eindimensionalen Fall, Wachstumsregeln genannt.

Eine Wachstumsregel für Penrose-Parkette muss einen Steuerungsmechanismus enthalten, der darüber entscheidet, welche der jeweils möglichen Anlegungen bzw. Überdeckungen die Wagenrad-Ordnung fehlerfrei aufbauen.

Teil 16: Die fünfdimensionalen Quasizellen Q^σ

Auf der Grundlage eindimensionaler Quasizellen Q^x *(vgl. Fig. 8)*, die das fehlerfreie Wachstum einer Fibonacci-Sequenz steuern, ist es ebenso möglich, fünfdimensionale Quasizellen Q^σ (sprich: Q-sigma) zu konstruieren. Die Quasizellen Q^σ steuern das fehlerfreie Wachstum einer Wagenradordnung („Quasiperiodic Succession“ von Uli Gaenshirt & M. Willsch, Philosophical Magazine, Juni 2007).

- In jeder Quasizelle Q^σ *(Fig. 16.1)* sind fünf Q^x-Teilzellen (Q^a, Q^b, Q^c, Q^d und Q^e) einander in derselben Form überlagert wie die LSLSLLSL-Sequenzen in *Fig. 10.1*.
- Die zehneckige Q^σ-Zelle hat, ebenso wie die Gummelt-Zelle, eine Äquivalenzbeziehung zum dicken (hier hellblau gefärbten) Rhombus, besitzt aber zusätzlich als Steuerungsmechanismus die fünf roten Doppelskalen ihrer fünf Q^x–Teilzellen (der bewegliche gelbe Stab ist in *Fig. 16.1* nur auf der Q^d-Skala mit angebracht).
- Im Q^σ-Zehneck ist der trapezförmige Bereich unveränderlich (d.h. elementar).
- Bei einer Überdeckung von Q^σ-Zellen müssen jeweils alle fünf Skalenwerte auf jede in Frage kommende Nachbarzelle umgerechnet werden.

Nach den herkömmlichen Anlegeregeln hätte man die freie Wahl, ob man den beweglichen Plexiglas-Rhombus *(Fig. 16.2)* an die obere oder an die untere Seite des hellblauen Rhombus anlegen möchte.
In der gesteuerten Q^σ-Zelle wird diese Wahl vom Q^d-Skalenwert getroffen:

- Befindet sich der Wert auf der roten Q^d-Skala zwischen 0 und 0,618... , dann kann dieser Wert von der rechten roten Q^d-Skala nur in der oberen Stellung des beweglichen Rhombus auf dessen parallele grüne Q^b-Skala übertragen werden.
- Befindet sich der Wert auf der roten Q^d-Skala zwischen 0,618... und 1, dann kann dieser Wert von der rechten roten Q^d-Skala nur in der unteren Stellung des beweglichen Rhombus auf dessen parallele grüne Q^a-Skala übertragen werden.

Fig. 16.3 zeigt die drehsymmetrische Nulllage der fünf gelben Stäbe in der Startzelle Q^σ_0 (stellvertretend für die Startzelle ist ihr äquivalenter, safrangelber Rhombus dargestellt).
Von dieser Startzelle wird ein Wert von 0,381... auf die Q^d-Skala des hellblauen Rhombus übertragen. Da dieser Wert zwischen 0 und 0,618... liegt, kann er nur in der oberen Stellung des beweglichen Rhombus auf dessen grüne Q^b-Skala übertragen werden. Die Position des grünen Rhombus in *Fig. 16.4* bestätigt die Übereinstimmung der oberen Stellung mit der Wagenradordnung!

Teil 17: Wachstumsformel für Penrose-Parkette

Die schrittweise Erzeugung einer Wagenradordnung durch die Überdeckung von gesteuerten Quasizellen Q^σ gelingt nur, wenn man mit einer Startzelle Q^σ_0 beginnt. Bei ihr sind die fünf gelben Stäbe der fünf Teilzellen jeweils bei einem Skalenwert $\mu_0 = 0{,}0...01$ positioniert. Dadurch bilden sie eine zehnzählig drehsymmetrische Form miteinander *(vgl. Fig. 16.3).*

- Nur eine so eingestellte Startzelle Q^σ_0 garantiert, dass die Teilzellen der fünfdimensionalen Q^σ-Zellen die fünf Fibonacci-Sequenzen in den fünf räumlichen Richtungen so aufbauen, dass die gleiche Gitterstruktur wie in *Fig. 10.1* entsteht.
- Da in dieser Gitterstruktur sowohl die dicken Rhomben als auch deren äquivalente Q^σ-Zellen festgelegte Plätze auf den unregelmäßig fünfeckigene Gittermaschen besetzen, ist der fehlerfreie Aufbau der Wagenradordnung gewährleistet.

In *Fig. 17.1 Abschnitt IV* wird eine eindimensionale rekursive Wachstumsformel zur Erzeugung einer Fibonacci-Sequenz angegeben. Auf der Grundlage dieser Formel wurde eine fünfdimensionale rekursive Wachstumsformel zur Erzeugung eines Penrose-Parketts entwickelt, die in *Fig. 17.2 Abschnitt VIII* zu sehen ist:

- In die fünf Zeilen der zentralen Wertetabelle dürfen nur fünf gültige Skalenwerte (a, b, c, d, e) einer Q^σ-Zelle bzw. eines Rhombus eingetragen werden.
- Die Startwerte sind: $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = \mu_0 = 0{,}0...01.$
- In den zehn Umrechnungstabellen für die zehn in Frage kommenden Nachbarschafts-positionen ($h_{\bar{1}}$, $h_{\bar{4}}$, $h_{\bar{3}}$, $h_{\bar{2}}$, $h_{\bar{5}}$, h_5, h_4, h_3, h_2, h_1) wird ermittelt, ob die Skalenwerte einer Nachbar-Zelle bzw. eines Nachbar-Rhombus gültig sind ($\in$), oder nicht ($\notin$).
- Nur Nachbarschaftspositionen mit fünf gültigen Werten (fünfmal $\in$) sind erlaubt und bekommen den Wahrheitswert T (von engl. true: wahr). Ein einziger ungültiger Wert (einmal $\notin$) führt zu einem Verbot mit dem Wahrheitswert F (von engl. false: falsch).
- Die Werte einer erlaubten Position darf man in die Wertetabelle eines neuen Formel-Formulars eintragen und kann damit in den zehn Umrechnungstabellen die erlaubten Nachbarschaften dieser Position berechnen.

Auf diese Weise kann der schrittweise Aufbau eines fehlerfreien Rhomben-Parketts auf rein mathematischem Weg gesteuert werden! Daraus folgt, dass theoretisch ein fehlerfreies, quasikristallines Wachstum möglich ist.